

UNIVERSITÄT KARLSRUHE



Seminar in  
Differentialgeometrie

Vortrag mit dem Thema

Nichtorientierbare Flächen im  $\mathbb{R}^3$

Michael Ralph Pape

WS 1998/1999

## 1 Einleitung

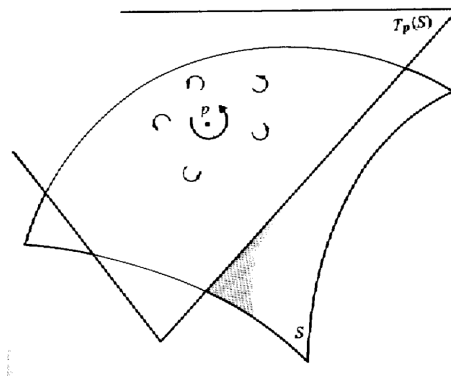
Die Existenz nichtorientierbarer Flächen war eine bedeutende mathematische Entdeckung des 19. Jahrhunderts.

Das Ziel dieses Seminars ist es, solche Flächen ein wenig besser zu verstehen und sich mit Hilfe von Maple ein Bild von ihnen zu machen.

Um bestimmen zu können, welche Flächen nicht orientierbar sind, müssen wir zuerst Klarheit über den Begriff der Orientierbarkeit regulärer Flächen erlangen. Später werden wir Beispiele für nichtorientierbare Flächen, mit Hilfe gewisser Identifizierungen der Seiten eines Rechtecks, kennenlernen. Im Anschluß daran, wollen wir uns noch der Realisierung solcher nichtorientierbarer Flächen im  $\mathbb{R}^3$  widmen.

## 2 Orientierbarkeit von Flächen

Jeder Punkt  $p$  einer regulären Fläche  $S$  besitzt eine Tangentialebene  $T_p S$ . Eine intuitive Wahl einer Orientierung auf dieser Tangentialebene  $T_p S$  induziert eine Orientierung in einer Umgebung des Punktes  $p$  auf  $S$ . Intuitive Wahl bedeutet, daß hinreichend kleine geschlossene Kurven um Punkte in dieser Umgebung, im positiven Sinn durchlaufen werden.



Ist es möglich, die Wahl für jedes  $p \in S$  so zu treffen, daß die Orientierung im Durchschnitt von zwei Umgebungen übereinstimmt, so heißt  $S$  *orientierbar*. Ist das nicht möglich, so heißt  $S$  *nicht orientierbar*.

Wir betrachten nun eine Parametrisierung  $x(u, v)$  einer Umgebung eines Punktes  $p$  einer regulären Fläche  $S$ . Als Orientierung von  $T_p S$  erhalten wir die Ori-

entierung der zugehörigen geordneten Basis  $\{x_u, x_v\}$ . Gehört  $p$  zur Koordinatenumgebung einer anderen Parametrisierung  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ , so läßt sich die neue Basis  $\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\}$  in Termen der ersten ausdrücken durch

$$\bar{x}_{\bar{u}} = x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \quad \bar{x}_{\bar{v}} = x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$$

wobei  $u = u(\bar{u}, \bar{v})$  und  $v = v(\bar{u}, \bar{v})$  die Darstellungen des Koordinatenwechsels sind. Die Basen  $\{x_u, x_v\}$  und  $\{\bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}\}$  bestimmen genau dann dieselbe Orientierung von  $T_p S$ , wenn die Jacobische  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$  des Koordinatenwechsels positiv ist.

**Definition 1:** Eine reguläre Fläche  $S$  heißt *orientierbar*, wenn es möglich ist, sie mit einer Familie von Koordinatenumgebungen so zu überdecken, daß, wenn ein Punkt  $p \in S$  zu zwei Umgebungen dieser Familie gehört, der Koordinatenwechsel eine positive Jacobische hat. Kann man eine solche Familie finden, so ist  $S$  *orientierbar*. Andernfalls ist  $S$  *nicht orientierbar*.

Im  $\mathbb{R}^3$  kann man eine *geometrische Interpretation der Orientierbarkeit* einer regulären Fläche geben.

Ein gegebenes Koordinatensystem  $x(u, v)$  liefert bei  $p$  eine bestimmte Wahl eines *Einheitsnormalenvektors*  $N$  bei  $p$  durch die Formel

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}(p). \quad (1)$$

Nimmt man ein anderes Koordinatensystem  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$  bei  $p$  so gilt

$$\bar{x}_{\bar{u}} \times \bar{x}_{\bar{v}} = (x_u \times x_v) \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}, \quad (2)$$

wobei  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$  die Jakobische des Koordinatenwechsels ist.  $N$  behält deshalb sein Vorzeichen bei oder ändert es, je nachdem ob  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$  positiv oder negativ ist.

**Definition 2:** Sei  $U \subset S$  offen. Eine differenzierbare Abbildung  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die jedem  $q \in U$  einen Einheitsnormalenvektor  $N(q) \in \mathbb{R}^3$  an  $S$  in  $q$  zuordnet, heißt *differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld*.

**Satz 1:** Eine reguläre Fläche  $S \subset \mathbb{R}^3$  ist genau dann *orientierbar*, wenn es ein differenzierbares und damit stetiges Einheitsnormalenvektorfeld  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf  $S$  gibt.

**Beweis:** Ist  $S$  orientierbar, so ist es möglich,  $S$  mit einer Familie von Koordinatenumgebungen so zu überdecken, daß der Koordinatenwechsel im Durchschnitt von je zwei Koordinatenumgebungen, eine positive Jacobische hat. In den Punkten  $p = x(u, v)$  jeder Umgebung definieren wir den Einheitsnormalenvektor  $N(p) = N(u, v)$  durch Gleichung (1).  $N(p)$  ist wohldefiniert, denn, falls  $p$  zu zwei Koordinatenumgebungen mit Parametern  $(u, v)$  und  $(\bar{u}, \bar{v})$  gehört, die Normalenvektoren  $N(u, v)$  und  $N(\bar{u}, \bar{v})$  wegen Gleichung (2) übereinstimmen. Darüber hinaus sind (wegen Gleichung (1)) die Koordinaten von  $N(u, v)$  in  $\mathbb{R}^3$  differenzierbare Funktionen von  $(u, v)$  und die Abbildung  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist deshalb differenzierbar.

Auf der anderen Seite sei  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld. Wir betrachten eine Familie *zusammenhängender* Koordinatenumgebungen, die  $S$  überdecken. Für die Punkte  $p = x(u, v)$  **JEDER** Koordinatenumgebung  $x(W)$ ,  $W \subset \mathbb{R}^2$ , ist es möglich es so einzurichten, daß aufgrund der Stetigkeit von  $N$

$$N(p) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$$

gilt. Das innere Produkt

$$\langle N(p), \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} \rangle = f(p) = \pm 1$$

ist eine stetige Funktion auf  $x(W)$ . Weil  $W$  zusammenhängend ist, ist das Vorzeichen von  $f$  konstant. Ist  $f = -1$  so vertauschen wir  $u$  und  $v$  in der Parametrisierung und die Behauptung folgt.

Verfährt man so mit allen Koordinatenumgebungen, dann ist im Durchschnitt von je zwei Koordinatenumgebungen, z.B.  $x(u, v)$  und  $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$  die Jacobische  $\frac{\partial(x, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  sicherlich positiv. Nach Definition 1 ist  $S$  dann orientiert. **qed**

Der Beweis zeigt, daß man nur die Existenz eines stetigen Vektorfeldes auf  $S$  braucht, damit  $S$  orientierbar ist. Ein solches Vektorfeld ist automatisch differenzierbar.

Bisher haben wir die theoretischen Grundlagen für die Orientierbarkeit besprochen. Nun wenden wir uns topologischen Beschreibungen von Flächen zu.

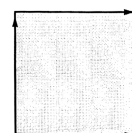
### 3 Topologische Beschreibung von Flächen

Es gibt topologische Beschreibungen von einigen elementaren Flächen durch Identifizierung mit den Seiten eines Quadrates. Kleben wir z.B. die obere und die untere Seite eines Quadrates zusammen, so erhalten wir einen *Zylinder*. Anschaulich läßt sich das Verkleben oder das Identifizieren durch ein Quadrat darstellen, welches an der oberen und unteren Kante je einen in die gleiche Richtung zeigenden Pfeil hat.



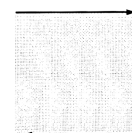
Zylinder

Verkleben wir nun noch die rechte und die linke Seite des Quadrates, was sich darstellen läßt durch zwei nach oben oder unten zeigende Pfeile an den Kanten, so entsteht ein *Torus*.



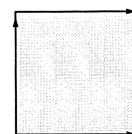
Torus

Identifizieren wir wieder die Ober- und Unterkante des Quadrates, aber diesmal mit umgekehrt orientierten Pfeilen, so erhalten wir das *Möbiusband*.



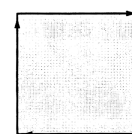
Möbiusband

Die *Kleinsche Flasche* entsteht bei einem solchen Identifizierungsprozeß, wenn die horizontalen Pfeile in die gleiche Richtung und die vertikalen in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Bei Vertauschung von horizontal und vertikal ergibt sich dieselbe Fläche.



Kleinsche Flasche

Schließlich können wir die Quadratseiten noch so identifizieren, daß sowohl die vertikalen als auch die horizontalen Pfeile in unterschiedliche Richtungen zeigen. Die so entstandene Fläche heißt *reelle projektive Ebene*. Man kann sie sich als *Sphäre* vorstellen, bei der alle Paare antipodal gegenüberliegender Punkte zu jeweils einem einzigen Punkt identifiziert werden.



Die projektive Ebene

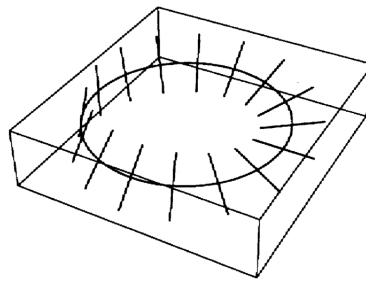
Damit haben wir topologische Beschreibungen des Möbiusbandes, der Kleinschen Flasche und der reellen projektiven Ebene gegeben. Diese drei Flächen erweisen sich als nicht orientierbar.

Schwierig ist es für diese Flächen Parameterdarstellungen zu finden.

### 4 Das Möbiusband

Um für das Möbiusband eine Parameterdarstellung zu finden, ist es von Vorteil sich ein anderes Modell zu schaffen. Hierbei läßt man ein Geradensegment um eine Achse kreisen, wobei es sich bei jeder Umkreisung einmal um seinen Mittelpunkt dreht. Wir erhalten für das Möbiusband die Parameterdarstellung:

$$\mathbf{M}(u, v) \rightarrow a \left( \cos u + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos u, \sin u + v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin u, v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right).$$

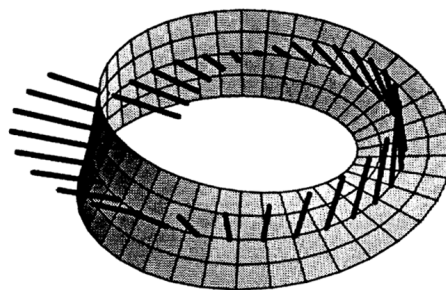


Gerade, die bei Drehung ein Möbiusband bildet

Man sieht leicht, daß für  $v = 0$  sich der zentrale Kreis des Möbiusbandes ergibt und daß jedes  $v$  wenn man  $u$  festhält, eine, den zentralen Kreis schneidende Gerade ist. Läuft  $u$  von 0 bis  $2\pi$ , so variiert der Winkel zwischen der  $z$ -Achse und der Geraden zwischen 0 und  $\pi$ .

Jeder Versuch, ein Einheitsnormalenvektorfeld auf dem ganzen Möbiusband zu definieren, ist zum Scheitern verurteilt. Es läßt sich zwar ein solches Feld lokal angeben, versucht man es aber durch Verschiebung entlang des Mittelkreises auf das gesamte Möbiusband auszudehnen, so kommt die Einheitsnormale nach einer vollen Umdrehung entlang dieses Kreises auf der anderen Seite der Fläche an.

Das bedeutet, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist.



Normalen an ein Möbiusband

Als nächstes wenden wir uns der Kleinschen Flasche zu.

## 5 Die Kleinsche Flasche

Sie ist ebenso wie das Möbiusband eine nicht orientierbare Fläche. Sie läßt sich als die Fläche beschreiben, die entsteht, wenn man eine Acht-Kurve die sich um

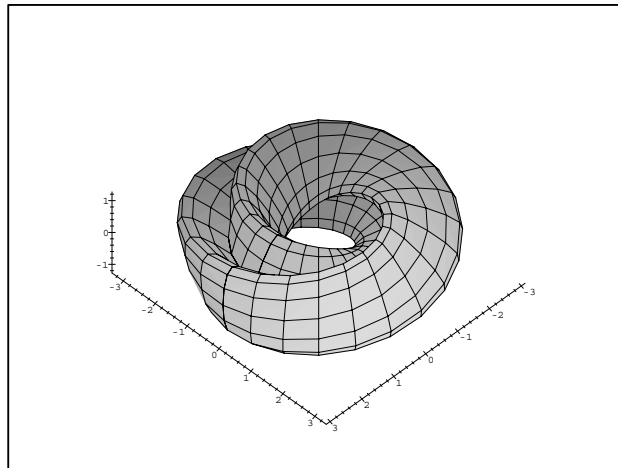
ihren Mittelpunkt dreht, um eine Achse kreisen läßt. Die Kreisbewegung und die Drehung erfolgen wie beim Möbiusband, nur nimmt man hier anstelle des Geradensegments eine Acht-Kurve.

Aus diesem Modell entsteht die folgende Parameterdarstellung der Kleinschen Flasche:

$$\begin{aligned} \text{KF}(u, v) = & \left( (a + \cos(\frac{u}{2}) \sin v - \sin(\frac{u}{2}) \sin(2v)) \cos u, \right. \\ & (a + \cos(\frac{u}{2}) \sin v - \sin(\frac{u}{2}) \sin(2v)) \sin u, \\ & \left. \sin(\frac{u}{2}) \sin v + \cos(\frac{u}{2}) \sin(2v) \right). \end{aligned}$$

Der zentrale Kreis der Kleinschen Flasche ist  $\text{KF}(u, 0)$ . Halten wir  $u$  fest und betrachten nur  $v$ , so sehen wir eine Acht-Kurve. Läuft nun  $u$  von 0 bis  $2\pi$ , so läuft der Drehwinkel der Acht von 0 bis  $\pi$ .

Dieselben Drehungen sind uns schon bei dem Möbiusband begegnet. Auch hier ist es nicht möglich ein Einheitsnormalenvektorfeld global zu definieren.



Wegen ihrer Selbstschneide ist die Kleinsche Flasche im  $\mathbb{R}^3$  keine reguläre Fläche.

Zum Abschluß wenden wir uns noch einer Realisierung der reellen projektiven Ebene zu.

## 6 Realisierungen der reellen projektiven Ebene

Sei  $S^2(a) = \{p \mid \|p\| = a\}$  die Sphäre vom Radius  $a$  im  $\mathbb{R}^3$ . Die *antipodale Abbildung*  $A : S^2(a) \rightarrow S^2(a)$  ist durch  $A(p) = -p$  definiert. Sie ist ein

Diffeomorphismus. Die reelle projektive Ebene  $\mathbb{R}P^2(a)$  läßt sich als die Menge definieren, die man erhält, wenn man antipodal gegenüberliegende Punkte von  $S^2(a)$  miteinander identifiziert. Somit ist  $\mathbb{R}P^2(a) = \{\{p, -p\} \mid \|p\| = a\}$ .

Um die reelle projektive Ebene als Fläche im  $\mathbb{R}^3$  zu realisieren müssen wir also nach einer Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  suchen, die die antipodale Eigenschaft besitzt.

**Definition 3:** Gilt für eine Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(-p) = F(p),$$

so sagt man  $F$  besitzt die *antipodale Eigenschaft*.

**Satz 2:** Jede Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die die antipodale Eigenschaft hat, definiert eine andere Abbildung  $\widetilde{F}_a : \mathbb{R}P^2(a) \rightarrow F(S^2(a)) \subset \mathbb{R}^3$ , durch

$$\widetilde{F}_a(\{p, -p\}) = F(p).$$

D.h., man kann  $\mathbb{R}P^2(a)$  als die Bildmenge von  $S^2(a)$  (unter der Abbildung  $F$ ) betrachten. Jedes Koordinatennetz  $x : U \rightarrow S^2(a)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$  führt zu einem, durch die Festsetzung  $\tilde{x}(u, v) = F(x(u, v))$  definierten, Koordinatennetz  $\tilde{x} : U \rightarrow F(S^2(a))$ . Wir betrachten nun ein Beispiel für Abbildungen, die die antipodale Eigenschaft besitzen. Wir werden diese Abbildung zu Erzeugung einer Realisierung der reellen projektive Ebene verwenden.

## 6.1 Die Steinersche römische Fläche.

Jacob Steiner entdeckte 1844, bei eine Rombesuch, eine Fläche, die man heute die Steinersche römische Fläche nennt. Sie ist eine Realisierung der reellen projektiven Ebene.

Um die Steinersche römische Flasche zu beschreiben, definiert man sich eine Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ . Es ist leicht zu sehen, daß diese Abbildung die antipodale Eigenschaft hat. Folglich induziert  $F$  eine Abbildung  $\widetilde{F} : \mathbb{R}P^2(a) \rightarrow F(S^2(a))$  von der reellen projektiven Ebene  $\mathbb{R}P^2(a)$  auf  $F(S^2(a))$ .  $F(S^2(a))$  heißt die *Steinersche römische Fläche vom Radius a*.

Verknüpft man nun noch die Abbildung  $F$  mit der Standardparametrisierung von  $S^2(a)$ , also dem Koordinatennetz  $x : (u, v) \rightarrow (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v)$ , so parametrisiert diese Verknüpfung die gesamte Steinersche römische Fläche.

Ihre Parametrisierung lautet



$$\text{SRF}(u, v) = \left(\frac{a^2}{2}\right)(\sin(2u)(\cos v)^2, \sin u \sin(2v), \cos u \sin(2v)).$$

