

UNIVERSITÄT KARLSRUHE



Vortrag zum Seminar

EXPERIMENTELLE METHODEN DER
TEILCHENPHYSIK

mit dem Thema

ELEKTROMAGNETISCHE
WECHSELWIRKUNG VON PHOTONEN UND
ELEKTRONEN MIT MATERIE

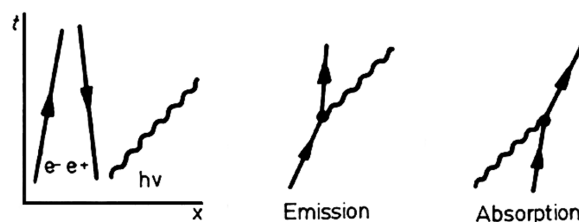
Michael Ralph Pape

WS 1998/1999

1 Einleitung

Unsere experimentellen Kenntnisse über den Atomkern und die Elementarteilchen erhalten wir hauptsächlich, indem wir Stoffe mit Mikroteilchen beschießen. Die dabei entstehenden Reaktionsprodukte hinterlassen Spuren in den Stoffen. Aus diesen können dann Rückschlüsse auf die Teilchen gezogen werden.

Ein wichtiges Hilfsmittel um diese Prozesse darzustellen, sind die FEYNMANN-DIAGRAMME. In ihnen wird vertikal die Zeit und horizontal eine Ortskoordinate aufgetragen. Ein gleichförmig bewegtes Teilchen wird durch eine gerade „Weltlinie“ dargestellt. Die Steigung der Linie gibt die Geschwindigkeit des Teilchens an. Photonen werden als Wellenlinie dargestellt. Gewöhnlich kennzeichnet man die Linien geladener Teilchen noch mit einem Pfeil. Ein Elektronenpfeil zeigt in die Zukunft, ein Positronenpfeil in die Vergangenheit. Alle Ereignisse werden durch Punkte oder Knoten dargestellt, in denen sich die Linien kreuzen, berühren, verzweigen oder vereinen. In den Vertizes gilt Energie- und Impulserhaltung.



Feynmann-Diagramme veranschaulichen in erster Linie mathematische Ausdrücke für die entsprechenden Teilchen.

2 Wechselwirkung von Elektronen mit Materie

Die hauptsächlichsten Vorgänge, die zum Energieverlust bei Elektronen führen, sind Ionisation und Anregung. Bei relativistischen Energien tritt zusätzlich Bremsstrahlung hinzu.

2.1 Inelastische Streuung

2.1.1 Ionisationsverluste

Im Ionisationsbereich $E_B < E_e < E_c$ erleidet das Elektron viele Streuungen aufgrund seiner kleinen Masse. BETHE hat unter Berücksichtigung dieser und anderer Besonderheiten den spezifischen Ionisationsverlust für Elektronen abgeleitet. Er erhielt:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} \approx \frac{e^4 \cdot N_V \cdot Z}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0^2 \cdot m_e \cdot c^2} \cdot \left(\ln\left(\frac{E_e \cdot \sqrt{\gamma}}{\sqrt{2} \cdot \langle E_B^{(e)} \rangle}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right),$$

mit N_V Atomdichte, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ dem Koeffizienten der Lorentz-Transformation

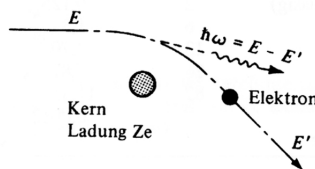
und $\langle E_B^{(e)} \rangle$ der mittleren Bindungsenergie der Hüllenelektronen.

Stark vereinfacht gilt dann: $-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} \sim Z \cdot \ln(E_e)$.

2.1.2 Strahlungsverluste

Strahlungsverluste treten im dem Bereich $E_e > E_c$ auf.

Schnelle geladene Teilchen verlieren Energie durch Wechselwirkung mit dem Coulombfeld der Kerne der durchdrungenen Materie. Sie werden abgelenkt. Dieser Vorgang wird als Coulombstreuung bezeichnet. Die Ablenkung bremst oder beschleunigt die Teilchen. Ein beschleunigtes Teilchen strahlt und setzt einen Teil seiner kinetischen Energie in Form von Photonen frei. Diese Strahlung nennt man *Bremsstrahlung*.



Der Bremsstrahlungsverlust von Elektronen mit hoher kinetischer Energie, d.h.

$E_e \gg \frac{m_e c^2}{\alpha \cdot Z^{1/3}}$, ergibt sich zu

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = 4 \cdot \alpha \cdot N_A \cdot \frac{Z^2}{A} \cdot r_e^2 \cdot E_e \cdot \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) = \frac{E_e}{X_0}$$

mit Z , A Ladungs- und Massezahl des bremsenden Mediums, E_e der Energie des einfallenden Elektrons und $r_e = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot c^2}$ dem Elektronenradius.

Durch $-(\frac{dE}{dx})_{rad} = \frac{E_e}{X_0}$ wird die Strahlungslänge X_0 definiert. Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir $E(X) = E_0 \cdot e^{-\frac{X}{X_0}}$. Diese Funktion beschreibt die exponentielle Schwächung der Energie eines geladenen Teilchens durch Bremsstrahlungsverluste.

Bemerkenswert ist, daß die Bremsstrahlungsverluste proportional zur Energie und umgekehrt proportional zum Massequadrat der einfallenden Elektronen sind. Die Ionisationsverluste hingegen sind proportional zum Logarithmus der Energie. D.h. für Bremsstrahlungsverluste gilt

$$-(\frac{dE}{dx})_{rad} \sim Z^2 \cdot E_e \quad \text{und} \quad -(\frac{dE}{dx})_{rad} \sim \frac{1}{m_e^2}$$

und für Ionisationsverluste gilt

$$-(\frac{dE}{dx})_{ion} \sim \ln(E_e).$$

Insgesamt ergibt sich für den Strahlungsverlust von Elektronen

$$\frac{dE}{dx} = (\frac{dE}{dx})_{ion} + (\frac{dE}{dx})_{rad}.$$

Sind Bremsstrahlungs- und Ionisationsverluste gerade gleich, so haben die einfallenden Elektronen gerade die kritische Energie.

Bei Energiewerten die weit unterhalb der *kritischen Energie* E_c , die näherungsweise durch $E_c = \frac{600MeV}{Z}$, gegeben ist, überwiegt die Anregung und Ionisation der gebundenen Absorberelektronen. Oberhalb der kritischen Energie überwiegen die Strahlungsverluste.

2.2 Strahlungslänge

Strahlungslänge ist der Abstand, in dem die Energie eines Teilchens (e^-) aufgrund von Strahlungsverlusten (z.B. durch Aussenden eines Photons) um den Faktor e abnimmt.

Für die Wechselwirkung von Teilchen (e^-) mit dem *Kern* gilt:

$$X_0 = \frac{A}{4 \cdot \alpha \cdot N_A \cdot Z^2 \cdot r_e^2 \cdot \ln(\frac{183}{Z^{1/3}})},$$

mit A der Atommasse, N_A der Avogadrokonstante, Z der Ladungszahl des Targets, α der Feinstrukturkonstanten und r_e^2 dem klassischen Elektronenradius.

Für die Wechselwirkung von Teilchen (e^-) mit den *Kern- und Hüllenelektronen* gilt:

$$X_0 = \frac{A}{4 \cdot \alpha \cdot N_A \cdot Z \cdot (Z+1) \cdot r_e^2 \cdot \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right)}$$

Dies kommt zustande, weil Bremsstrahlung auch durch die Wechselwirkung des einfallenden Teilchens mit den Elektronen der Targetmaterie emittiert wird. Da bei atomaren Targetelektronen die Ladung gleich 1 ist, erhält man dadurch einen zusätzlichen Beitrag zum Wirkungsquerschnitt der proportional zur Zahl der Targetelektronen ist, also $\sim Z$.

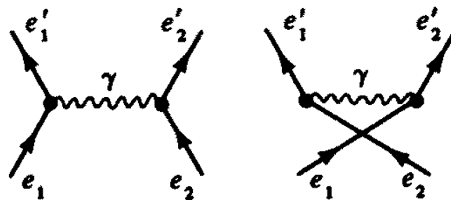
Unter Berücksichtigung der Abschirmeffekte der Hüllenelektronen gilt genauer:

$$X_0 = \frac{716,4 \cdot A}{Z \cdot (Z+1) \cdot \ln\left(\frac{183}{\sqrt{Z}}\right)}$$

Material	Wasser	Blei	Eisen	Kohlenstoff	Luft	Wasserstoff
$X_0 [cm]$	36	0.56	1.76	18.8	30000	700000

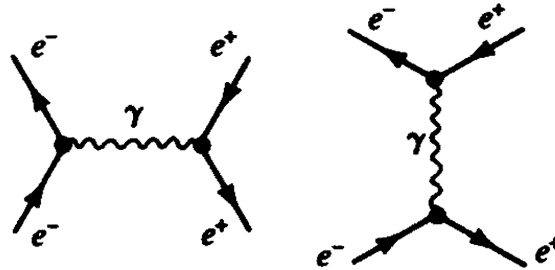
2.3 Elastische Streuung

2.3.1 Møllerstreuung ($e^-e^- \rightarrow e^-e^-$)



Bei der Møllerstreuung geht es um die Streuung von Elektronen an Elektronen. Die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen erfolgt durch Absorption und Emission von Lichtquanten. Da die beiden Elektronen nicht unterscheidbar sind, sind hier zwei Graphen denkbar. Die ausgetauschten Photonen sind nicht als freie Teilchen, sondern als virtuelle Teilchen aufzufassen. Diese dürfen innerhalb kurzer Zeit, in Übereinstimmung mit der Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$, den Energieerhaltungssatz verletzen. Die beiden Elektronen sind nicht unterscheidbar.

2.3.2 Bhabhastreuung ($e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$)



Hier geht es um die Streuung von Elektronen an Positronen. In der Feynmann-Darstellung sind zwei Graphen denkbar. Der Erste heißt Austauschdiagramm und der zweite Annihilations- oder Vernichtungsdiagramm.

Die virtuellen Photonen in den beiden Diagrammen der Bhabha-Streuung haben verschiedene Eigenschaften. Betrachtet man beide Reaktionen im Schwerpunktsystem, so haben die im *Austauschdiagramm* einfallenden und emittierten Elektronen gleiche Energie, aber entgegengesetzten Impuls. Daher sind Energie und Impuls des virtuellen Photons gegeben durch

$$E_\gamma = E_e - E'_e = 0 \quad \text{und} \quad p_\gamma = p_e - p'_e = +2p_e.$$

Definieren wir die Masse des virtuellen Photons durch $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, so finden wir

$$(mc^2)^2 = -(2p_e c)^2 < 0.$$

Das virtuelle Photon trägt nur Impuls, aber keine Energie. Das Quadrat seiner Masse ist negativ. Ein solches Photon wird *raumartig* genannt.

Im *Vernichtungsdiagramm* ist die Situation umgekehrt.

$$E_\gamma = E_{e^-} + E_{e^+} = 2E \quad \text{und} \quad p_\gamma = p_{e^-} + p_{e^+} = 0.$$

Das virtuelle Photon trägt nur Energie, aber keinen Impuls. Das Quadrat seiner Masse ist durch $(mc^2)^2 = (2E)^2 > 0$ gegeben. Es ist positiv und das Photon wird *zeitartig* genannt.

Bei der Bhabha-Streuung kommen sowohl zeit- wie auch raumartige Photonen vor. Die Übereinstimmung von Experiment und Theorie zeigt, daß dieses Konzept richtig ist, obwohl es fremdartig klingt.

3 Wechselwirkung von Photonen mit Materie

Photonen wechselwirken hauptsächlich durch drei Reaktionen mit Materie; durch den Photoeffekt, den Compton-Effekt und durch die Paarerzeugung. Die vollständige Behandlung dieser drei Prozesse ist ziemlich kompliziert. Die wesentlichen Tatsachen sind jedoch einfach.

Beim *Photoeffekt* wird das Photon von einem Atom absorbiert und ein Elektron aus der Schale geworfen.

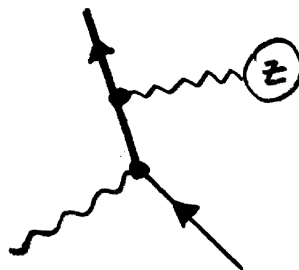
Im *Compton-Effekt* wird das Photon an einem Elektron des Atoms gestreut.

Bei der *Paarerzeugung* zerfällt das Photon in ein Elektron und ein Positron. Diese Reaktion ist im freien Raum unmöglich, da Energie und Impuls beim Zerfall des Photons in zwei massive Teilchen nicht gleichzeitig erhalten bleiben können. Im Coulombfeld des Kerns, der für den Ausgleich der Energie- und Impulsbilanz sorgt, tritt allerdings Paarerzeugung auf.

Die Energieabhängigkeit der drei Reaktionen ist sehr verschieden. Bei niedriger Energie, d.h. $E_\gamma < 100 \text{ keV}$, überwiegt der Photoeffekt. Der Comptoneffekt ist dort klein und die Paarerzeugung energetisch nicht möglich. Bei $E_\gamma \sim 1 \text{ MeV}$ ist der Comptoneffekt wesentlich und bei $E_\gamma > 2 \text{ MeV}$ überwiegt der Photoeffekt.

Zwei der drei Reaktionen, der Photoeffekt und die Paarerzeugung, vernichten das wechselwirkende Photon. In der Compton-Streuung verliert das gestreute Photon Energie.

3.1 Photoeffekt ($E_\gamma < 100 \text{ keV}$)



Als Photoeffekt bezeichnet man den Prozess der Emission eines Elektrons aus

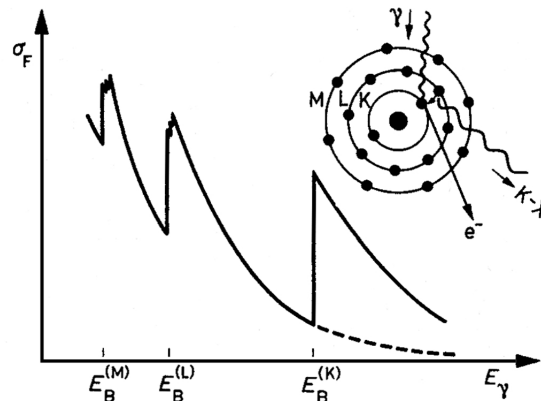
der i -ten Schale der Elektronenhülle infolge der Absorption eines Photons. Die kinetische Energie des sogenannten Photoelektrons E_e beträgt nach Einstein

$$E_e = E_\gamma - E_B^{(i)} \quad \text{mit} \quad i = \text{K, L, M, ...},$$

$E_\gamma = h\nu$ der Energie des Gammaquants und $E_B^{(i)}$ der Bindungsenergie eines Elektrons auf der i -ten Schale.

Auf das Atom wird ein Teil des Impulses des Photons übertragen, da Impuls- und Energieerhaltungssatz gleichzeitig gelten müssen, kann der Photoeffekt nur an einem gebundenen Elektron stattfinden. Für den Photoeffekt an einem freien Elektron kann der Impuls- und Energieerhaltungssatz nicht gleichzeitig gelten.

Dies erklärt auch die wesentlichen Merkmale des Photoeffekts.



Es treten starke Maxima im Wirkungsquerschnitt $\sigma_{Ph}(E_\gamma)$ auf, wenn die Energie der Quanten gerade ausreicht, um Elektronen der i -ten Schale aus dem Atom freizusetzen ($E_\gamma = E_B^{(i)}$). Unterhalb dieser Energien kann der Photoeffekt aus Gründen der Energieerhaltung nur an den jeweils höheren, d.h. schwächer gebundenen Schalen stattfinden. Oberhalb dieser Energiewerte sinkt die Wahrscheinlichkeit des Photoeffektes mit steigender Gammaenergie.

Die untere Energieschwelle ergibt sich aus der Bindungsenergie der äußeren Elektronenschale des Atoms.

Infolge der Auffüllung der freigewordenen Plätze auf den inneren Schalen durch äußere Hüllenelektronen wird charakteristische Röntgenstrahlung emittiert. Im nichtrelativistischen Bereich und nicht in unmittelbarer Nachbarschaft der Absorptionskanten ergibt sich ein relativ einfacher und geschlossener Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt $\sigma_{Ph}^{(K)}$ an der K-Schale.

Mit $\varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$ der reduzierten Photonenergie und $\varepsilon_K = \frac{\langle E_B^{(K)} \rangle}{m_e c^2}$ der reduzierten K-Schalenenergie folgt im Falle $E_\gamma > E_B^{(K)}$ d.h. $\varepsilon_K < \varepsilon < 1$:

$$\sigma_{Ph}^{(K)} = \frac{32 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \alpha^4 \cdot \pi \cdot r_e^2 \cdot \frac{Z^5}{\varepsilon^{7/2}} \sim \frac{Z^5}{\varepsilon^{7/2}},$$

und für hohe Energien $E_\gamma \gg E_B^{(K)}$, d.h. $\varepsilon > 1$:

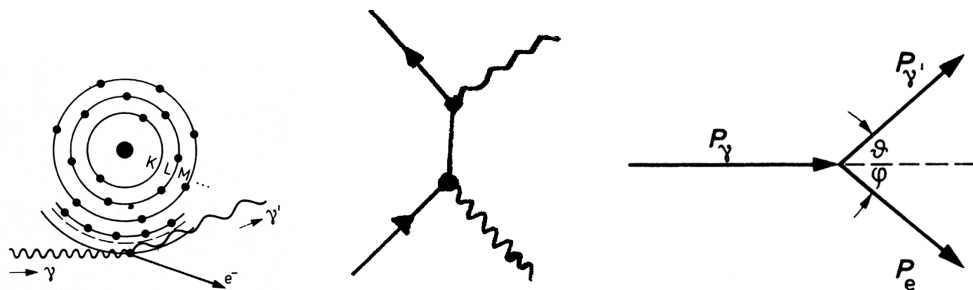
$$\sigma_{Ph}^{(K)} = 4 \cdot \alpha^4 \cdot \pi \cdot r_e^2 \cdot \frac{Z^5}{\varepsilon} \sim \frac{Z^5}{\varepsilon}.$$

Multipliziert man $\sigma_{Ph}^{(K)}$ mit dem Faktor 5/4 so erhält man gute Näherungen für den Gesamtwirkungsquerschnitt σ_{Ph} in den entsprechenden Energiebereichen E_γ .

Der Wirkungsquerschnitt für die Absorption eines Photons der Energie E_γ in der K-Schale ist wegen der Nähe des dritten Stoßpartners, des Atomkerns, der den Rückstoß übernimmt, besonders groß (ca. 80% des totalen Wirkungsquerschnitts).

3.2 Compton-Effekt ($E_\gamma \sim 1 \text{ MeV}$)

Bei der Compton-Streuung von Gammaquanten wird nur ein Teil der Gammaenergie auf das Elektron übertragen. Im Ergebnis ändern Gammaquant und Elektron ihre Richtung und Energie. Im Gegensatz zum Photoeffekt spielt hierbei die Bindung des Elektrons im Atom keine prinzipielle Rolle. Man kann bei genügend großer Gammaenergie $E_\gamma \gg E_B^{(i)}$ von der Streuung an einen freien, ruhenden Elektron ausgehen. Die unten stehende Abbildung zeigt den Compton-Effekt an einem Hüllenelektron und das zugehörige Impulsdiagramm.



Aus dem Energieerhaltungssatz

$$E_\gamma = E_{\gamma'} + E_e$$

und dem Impulserhaltungssatz

in x-Richtung: $\frac{E_\gamma}{c} = \frac{E_{\gamma'}}{c} \cdot \cos \vartheta + p_e \cos \varphi$

und in y-Richtung: $0 = \frac{E_{\gamma'}}{c} \cdot \sin \vartheta - p_e \sin \varphi$

kann man bei relativistischer Betrachtung die Energie der gestreuten Quanten und die der Rückstoßelektronen folgern. Es gilt

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \quad \text{bzw.} \quad E_e = (1 - \cos \vartheta) \cdot \frac{E_\gamma}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)}.$$

Die Größe des Energieübertrags zwischen Photon und Elektron ist richtungsabhängig. Der maximale Energieübertrag findet unter $\vartheta = 180^\circ$ statt, also bei Rückwärtsstreuung des Photons.

Bei genügend hoher Einschußenergie, $\varepsilon \gg 1$, wird die Energie der rückgestreuten Quanten unabhängig von der Einschußenergie. Es gilt dann: $E_{\gamma'}(180^\circ) \cong m_e c^2 / 2$.

Für die Änderung der Wellenlänge gilt

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta)$$

mit $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ der Comptonwellenlänge.

Für relativistische Photonenenergie erhält man den Klein-Nishina Wirkungsquerschnitt, bezogen auf ein Elektron. Er lautet für die extremen Fälle

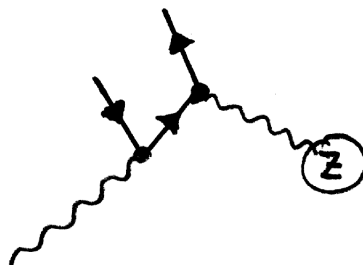
$$\varepsilon \ll 1 : \quad \sigma_c^e = \sigma_{Th} \cdot (1 - 2\varepsilon),$$

$$\varepsilon \gg 1 : \quad \sigma_c^e = \frac{3}{8} \cdot \sigma_{Th} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} + \ln 2\varepsilon \right),$$

mit $\sigma_{Th} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r_e^2$ der klassischen Thomson-Streuung.

Für die Compton-Streuung an Atomen erhöht sich der Wirkungsquerschnitt um den Faktor Z , weil im Atom genau Z , potentielle Streupartner zur Verfügung stehen. Es gilt $\sigma_c = Z \cdot \sigma_c^e$.

3.3 Paarbildung ($E_\gamma > 2 \text{ MeV}$)



Als Paarbildungseffekt bezeichnet man den Prozeß der Emission eines Positrons und eines Elektrons infolge der Absorption eines Gammaquants im Coulombfeld des Atoms. Der Kern erhält einen Rückstoßimpuls. Ohne ihn als Stoßpartner wäre dieser Prozess, wie auch der Photoeffekt, durch den Energie- und Impulserhaltungssatz verboten.

Die Geburt des Paares erfolgt nicht im Kern, sondern außerhalb, etwa in der Entfernung einer Compton-Wellenlänge λ_c vom Kernrand. So kann die Übertragung des Rückstoßimpulses an den Kern über das Coulombfeld erfolgen.

Als Schwellenenergie des Paarbildungseffektes im Kernfeld ergibt sich aus der Summe der Ruhemassen von Elektron und Positron der Wert $2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$.

Für den Fall, daß die Kernladung nicht durch die Atomelektronen abgeschirmt wird, d.h. für $1 < \varepsilon < \frac{137}{Z^{1/3}}$ ergibt sich der Paarerzeugungsquerschnitt von

$$\sigma_p = 4 \cdot \alpha \cdot r_e^2 \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{7}{9} \ln 2\varepsilon - \frac{109}{54} \right).$$

Das Gammaquant muß also dem Kern sehr nahe kommen um überhaupt eine Paarerzeugung wahrscheinlich werden zu lassen. Für die vollständige Abschirmung des Kernes dagegen, also für $\varepsilon \gg \frac{137}{Z^{1/3}}$, ergibt sich der Paarerzeugungsquerschnitt zu

$$\sigma_p = 4 \cdot \alpha \cdot r_e^2 \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{7}{9} \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) - \frac{1}{54} \right).$$

Für hohe Energien strebt der Paarerzeugungswirkungsquerschnitt, unter Vernachlässigung des kleinen Terms $\frac{1}{54}$, asymptotisch gegen den energieunabhängigen Grenzwert

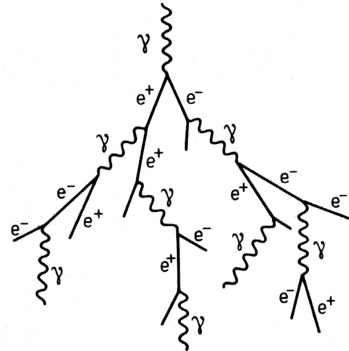
$$\sigma_p = \frac{7}{9} \cdot 4 \cdot \alpha \cdot r_e^2 \cdot Z^2 \cdot \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) \approx \frac{7}{9} \cdot \frac{A}{N_A} \cdot \frac{1}{X_0}.$$

Bei hohen Energien dominiert die Absorption von Gammaquanten infolge Paarbildung gegenüber allen anderen Prozessen.

Die dabei entstandenen Elektronen und Positronen entstehen mit großer Wahrscheinlichkeit in Vorwärtsrichtung bezüglich der Richtung des einfallenden Gammaquants. Der mittlere Winkel zwischen den beiden Teilchen verringert sich mit steigender Gammaenergie nach der Beziehung

$$\theta = \frac{m_e c^2}{E_\gamma}.$$

3.4 Photonenschauer



Beim Eintritt hochenergetischer Gammaquanten $E_\gamma > 100 \text{ MeV}$ in Stoffe kommt es zu dieser spezifischen Erscheinung. Die primären Gammaquanten erzeugen mit hoher Wahrscheinlichkeit je ein Positron-Elektronen-Paar. Diese entsenden hochenergetische Bremsstrahlungsquanten, von denen wiederum jedes ein Positron-Elektronen-Paar erzeugen kann. Dabei steigt anfangs die Anzahl der Elektronen und Positronen mit wachsender Eindringtiefe des Schauers in den Stoff. Dabei verringert sich die mittlere Energie der Teilchen. Dies hat zur Folge, daß Ionisationsverluste zunehmen, während die Strahlungsverluste geringer werden und schließlich die Teilchenzahl mit wachsender Eindringtiefe wieder abnimmt.

Ähnlich verläuft die Schauerbildung beim Einschub hochenergetischer Elektronen. Der einzige Unterschied ist dann, daß hier der primäre Prozess die Entsendung von hochenergetischen Bremsquanten ist.

Die mittlere freie Weglänge eines γ -Quants, bevor es ein Paar erzeugt, ist $X_p = \frac{9}{7} X_0$. D.h. ein Schritt im Graph ist ca. eine Strahlungslänge.

Literatur

- [1] Kleinknecht: Particle Detectors
- [2] Grupen: Teilchendetektoren
- [3] Musiol, Ranft: Kern- und Elementarteilchenphysik
- [4] Frauenfelder: Teilchen und Kerne